CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţele naturii
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX-a

1. Fie ABC un triunghi, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, iar P şi Q mijloacele segmentelor (MN) şi (BC). Dacă PQ este paralelă cu bisectoarea unghiului A, arătaţi că $(BM) \equiv (CN)$.

   Soluție:

   Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC şi $BM = x$, $CN = y$.

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{b}\overrightarrow{AC}\right)$; 3p

$\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$, $PQ \parallel AD \Rightarrow x = y$. 4p

2. Fie triunghiul ABC şi centrele O, I ale cercurilor circumscris, respectiv înscris. Să se arate că dacă are loc relaţia $5\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = 12\overrightarrow{OI}$, atunci $O \in BC$.

   Soluție:

   $5\overrightarrow{OA} + 4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) = 12(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI}) \Rightarrow 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 12\overrightarrow{AI}$. 3p

Cum $\overrightarrow{AI} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$, rezultă $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 12\frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$, deci $4 = \frac{12b}{a+b+c}$; 2p

$3 = \frac{12c}{a+b+c} \Rightarrow b = \frac{4c}{3}$, $a = \frac{5c}{3}$ şi $a^2 = b^2 + c^2$. 2p

3. Să se demonstreze că $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

Notam P(n) inegalitatea din enunt. Pentru a demonstra propozitia ($\forall$ n) P(n) folosim metoda inductiei matematice.

Etapa de verificare

Pentru n=1 se obtine P(1): $1<2\sqrt{1}$,propozitie adevarata. 1p

Etapa de demonstratie

Presupunem ca P(k) este adevarată, adică $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$. (1)

Demonstram ca propozitia P(k+1) este adevarata, adică

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$. 2p

Avem ca P(k) este propozitie adevarata. Adunam in ambii membri ai inegalității (1) termenul $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ și obținem inegalitatea adevarată :

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

A demonstra că propozitia P(k+1) este adevarată, revine la a arăta că:

$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$, $k \geq 1$

Eliminam numitorul $\sqrt{k+1}>0$ și obținem succesiv:

$2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1<2(k+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{k^2+k}<2k+1 \Leftrightarrow 4(k^2+k) < 4k^2+4k+1$, inegalitate adevarata. 3p

Asadar, P(k+1) este propozitie adevarata.

Cele doua etape fiind parcurse, conform metodei inductiei matematice, rezulta ca P(n) este adevarata oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. 1p

4. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ și $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   Știind că $2S_n = 3^n - 1$, $\forall n \geq 1$, să se arate ca $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

   Soluție:

1p

Din $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$ rezultă

$S_{n-1} = \frac{3^{n-1} - 1}{2}$ și 2p

$a_n = \frac{3^n - 1 - 3^{n-1} + 1}{2} = \frac{3^{n-1}(3-1)}{2}$ și 2p

$a_n = 3^{n-1}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

Rezultă $a_{n+1} = 3^n$ și $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, $n \geq 2$. 2p

Pentru $n = 1$ avem $S_1 = a_1 = 1$, $a_2 = 3$ și deci șirul este progresie geometrică cu rația 3. 1p